$\boxed{1}$

(1)

赤色である確率$=\dfrac{x}{72}=\dfrac{1}{9}$

黄色である確率$=\dfrac{y}{72}=\dfrac{1}{4}$

より，$x=8$，$y=18$

これと $x+y+z=36$ より，$z=10$

よって，白色である確率$=\dfrac{10}{72}=\dfrac{5}{36}$　・・・$\boxed{ア}$

(2)

$a+b+c+d+e+f=\dfrac{1+6}{2}\times 6=21$　・・・$\boxed{イ}$

$\boxed{ウ}\dfrac{1}{9}$　$\boxed{エ}\dfrac{1}{4}$　$\boxed{オ}\dfrac{5}{36}$

$a+b=P$，$c+d=Q$，$e+f=R$ とおくと，

$P+Q+R=21$　・・・①

$4P+9Q+5R=144$　・・・②　$\left(\because \dfrac{1}{9}P+\dfrac{1}{4}Q+\dfrac{5}{36}R=4\right)$

$3\le P,Q,R\le 11$　・・・③　$(\because 1+2\le P,Q,R\le 5+6)$

①より，

$P=21-R-Q$

これを②に代入すると，

$4(21-R-Q)+9Q+5R=144$

$R=60-5Q$

③より，

$3\le R\le 11$ だから，

$3\le 60-5Q\le 11$

よって，

$(Q,R)=(10,10),(11,5)$

$(Q,R)=(10,10)$ のとき，

$P=21-10-10=1$ より不適

$(Q,R)=(11,5)$ のとき，

$P=21-11-5=5$

よって，

$P=a+b=5$ 　・・・$\boxed{\text{カ}}$

$Q=c+d=11$ 　・・・$\boxed{\text{キ}}$

$R=e+f=5$ 　・・・$\boxed{\text{ク}}$

(3)

$c+d=11$，$c<d$ より，$c=5$，$d=6$

$a<b$，$a<e<f$ より，$a=1$

$a+b=5$ より，$b=4$

$e<f$，$e+f=5$ より，$e=2$，$f=3$

よって，

$(a,b,c,d,e,f)=(1,4,5,6,2,3)$ 　・・・$\boxed{\text{ケ}}$

(4)

すべてのカードを区別すると，

取り出したカードの全組み合わせの場合の数は，${}_{72}\mathrm{C}_2=36\cdot 71$

数字の和が 10 となる組み合わせは，$(5,5)$ と $(4,6)$ の場合があり，

$(5,5)$ の場合の数＝c 18 枚のうちから 2 枚を選ぶ場合の数＝${}_{18}\mathrm{C}_2=9\cdot 17$

$(4,6)$ の場合の数＝b 8 枚，d 18 枚のうちからそれぞれ 1 枚を選ぶ場合の数＝${}_{8}\mathrm{C}_1\cdot{}_{18}\mathrm{C}_1=8\cdot 18$

よって，

数字の和が 10 となる場合の数＝$9\cdot 17+8\cdot 18=9(17+16)=9\cdot 33$

よって，

求める確率＝$\dfrac{9\cdot 33}{36\cdot 71}=\dfrac{33}{284}$ 　・・・$\boxed{\text{コ}}$

$\boxed{2}$

(1)

正三角形 OAC について，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha + p^2} = \sqrt{a^2 + p^2}$$

これと $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 2$ より，

$a^2 + p^2 = 4$　・・・①

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| \cos\frac{\pi}{3} = 2 \quad ・・・②$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2p \quad ・・・③$$

②，③より，　$p = 1$

①および $a > 0$ より，　$a = \sqrt{3}$

正三角形 OBC についても同様にして，

$q = 1$，　$b = \sqrt{3}$

以上より，　$(a, b, p, q) = \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1, 1\right)$　・・・(答)

(2)

$\mathrm{A}\left(\sqrt{3}\cos\alpha, \sqrt{3}\sin\alpha, 1\right)$，　$\mathrm{B}\left(\sqrt{3}\cos\beta, \sqrt{3}\sin\beta, 1\right)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}(\cos\beta - \cos\alpha) \\ \sqrt{3}(\sin\beta - \sin\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad ・・・(答)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\alpha \\ \sqrt{3}\sin\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\beta \\ \sqrt{3}\sin\beta \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3\cos\alpha \cdot \cos\beta + 3\sin\alpha \cdot \sin\beta + 1 \\ &= 3\cos(\beta - \alpha) + 1 \end{aligned}$$

これと $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| \cos\frac{\pi}{3} = 2$ より，　$\cos(\beta - \alpha) = \frac{1}{3}$　・・・(答)

別解

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left(\sqrt{3}\cos\alpha-\sqrt{3}\cos\beta\right)^2+\left(\sqrt{3}\sin\alpha-\sqrt{3}\sin\beta\right)^2+(1-1)^2$$
$$=6-6(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=6-6\cos(\beta-\alpha)$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=2$ より，$6-6\cos(\beta-\alpha)=4$

よって，$\cos(\beta-\alpha)=\dfrac{1}{3}$

(3)

P は三角形 OAC の重心だから，

$$\mathrm{P}\left(\frac{0+\sqrt{3}\cos\alpha+0}{3},\frac{0+\sqrt{3}\sin\alpha+0}{3},\frac{0+1+2}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{3},\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{3},1\right)$$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{6},1\right)$ より，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ ・・・(答)

補足

P が重心であることの証明

△BOP，△BAP，△BCP について，

BP 共通，BO＝BA＝BC，∠BPO＝∠BPA＝∠BPC＝90° より，△BOP≡△BAP≡△BCP

よって，OP＝AP＝CP

これと△OAC が正三角形であることより，その性質から，P は△OAC の重心である。

(4)

$\cos(\beta-\alpha)=\dfrac{1}{3}$，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ より，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta+\dfrac{1}{2}\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta\right)^2=\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\sin\beta\right)^2$

$$\therefore\cos^2\beta=\frac{4}{27}-\frac{4}{9}\sin\beta+\frac{1}{3}\sin^2\beta\qquad\therefore 1-\sin^2\beta=\frac{4}{27}-\frac{4}{9}\sin\beta+\frac{1}{3}\sin^2\beta$$

$$\therefore 36\sin^2\beta-12\sin\beta-23=0\qquad\therefore\sin\beta=\frac{6\pm12\sqrt{6}}{36}=\frac{1\pm2\sqrt{6}}{6}$$

ここで，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}<\beta<\pi$ より，$\sin\beta>0$ よって，$\sin\beta=\dfrac{1+2\sqrt{6}}{6}$

したがって，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\sin\beta=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1+2\sqrt{6}}{12}=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{12}$ $\quad\therefore\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$

以上より，

$\mathrm{B}\left(\dfrac{3-2\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{6},1\right)$ ・・・(答)

3

(1)

$$f(x)=\int_2^{|x-2|}(-t+1)dt=\left[-\frac{1}{2}t^2+t\right]_2^{|x-2|}=-\frac{1}{2}(x-2)^2+|x-2|$$

$x \geq 2$ のとき，

$$f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+x-2=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$$

$x \leq 2$ のとき，

$$f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2-x+2=-\frac{1}{2}x^2+x$$

(2)

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+3x-4 & (2 \leq x)\\ -\frac{1}{2}x^2+x & (x \leq 2)\end{cases} \text{より，} f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{1}{2} & (2 \leq x)\\ -\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2} & (x \leq 2)\end{cases}$$

これを図示すると，次のページのグラフとなる。

よって，

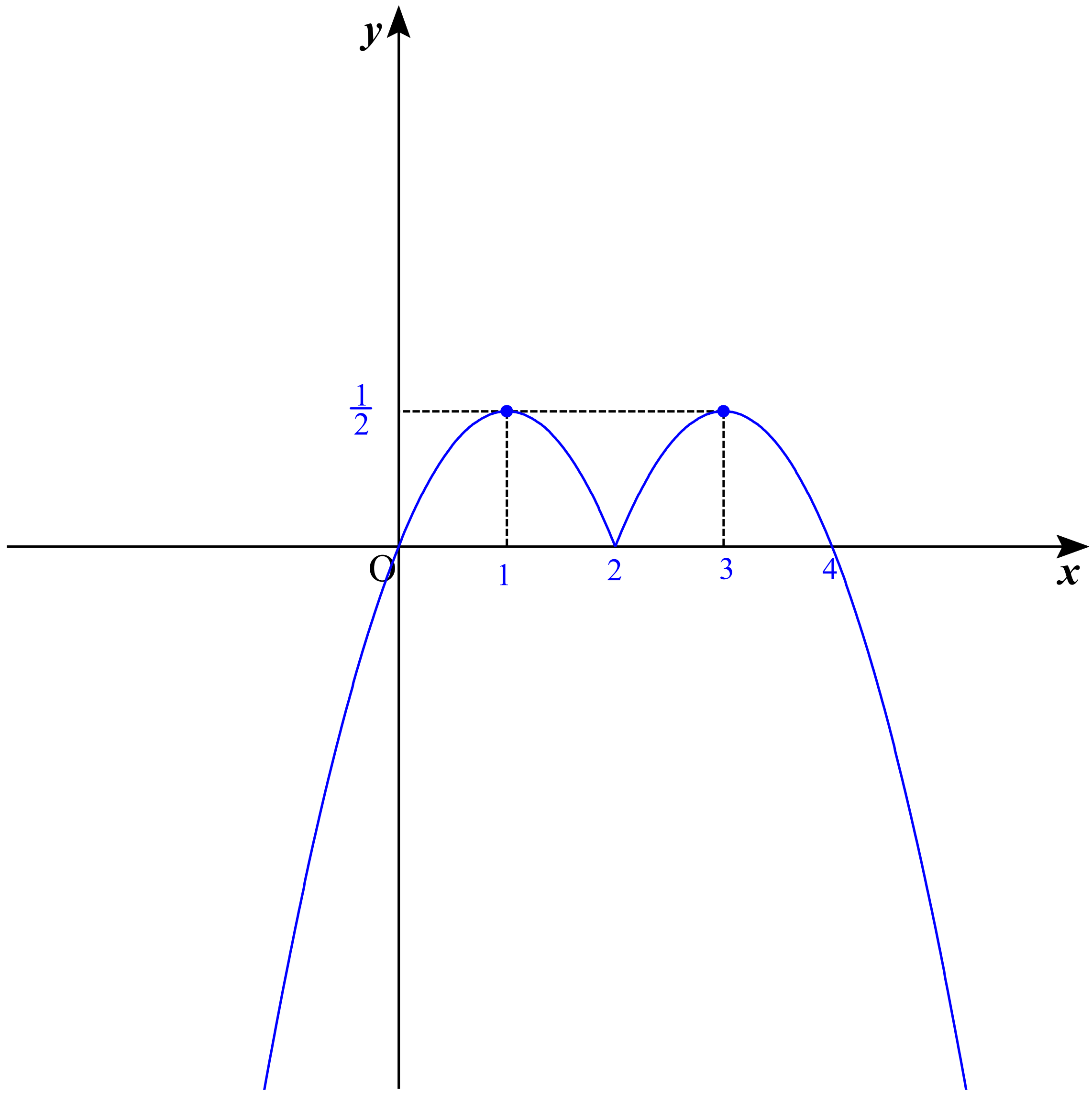
$x=1$，3 のとき $f(x)$ は最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

(3)

グラフより，x 軸との共有点は 3 個あり，その x 座標は，$x=0$，2，4

(4)

次のページ


y
$\frac{1}{2}$
O
1
2
3
4
x

(5)

$y=a(x+1)$ より，$y=ax+a$ は定点 $(-1,0)$ を通る傾き a の直線である。

$y=ax+a$ が $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x \quad (x\leq 2)$ と接するとき，曲線 C との共有点の数は 1

このとき，$-\dfrac{1}{2}x^2+x=ax+a$ は重解をもつから，$x^2+2(a-1)x+2a=0$ より，

判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-2a=a^2-4a+1=0 \quad \therefore a=2\pm\sqrt{3}$

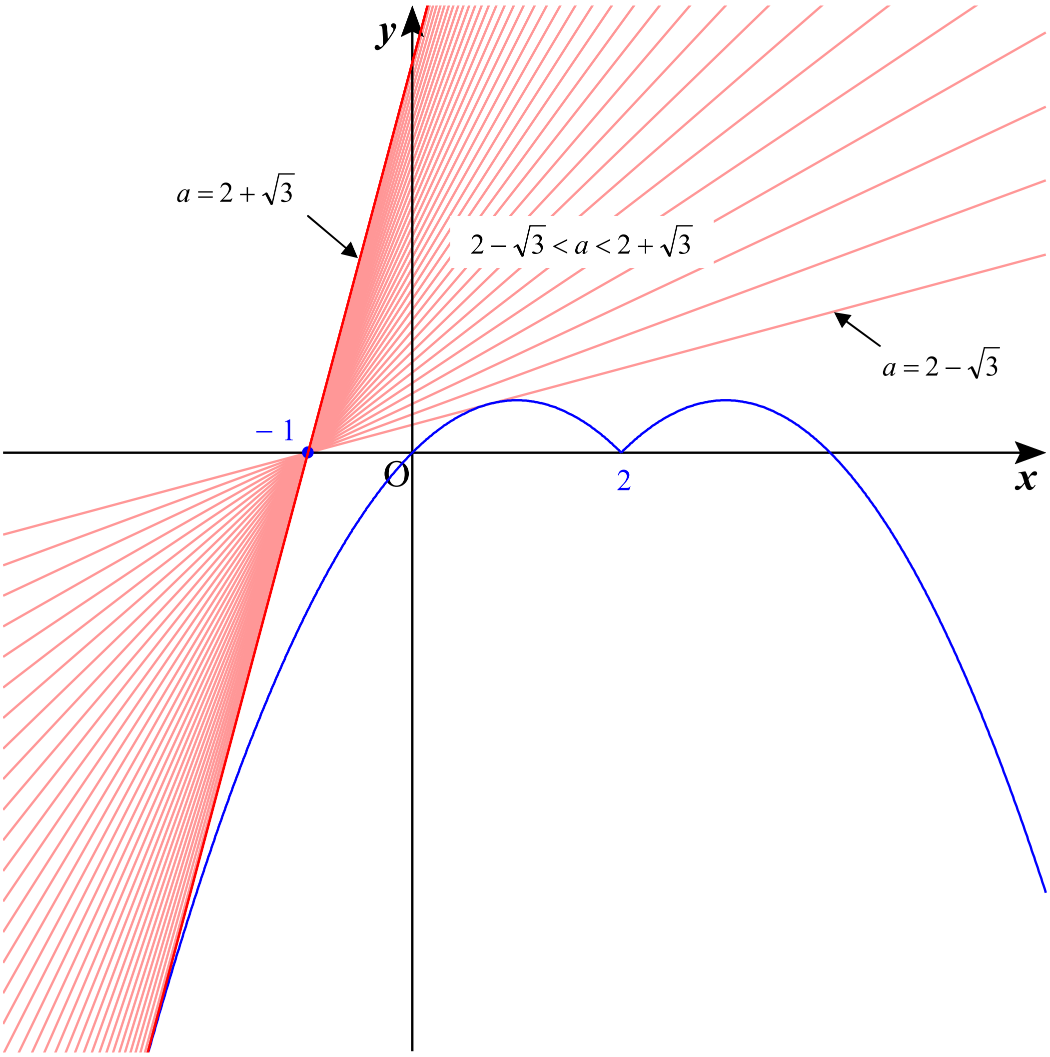
また，曲線 C との共有点の数が 0 となるのは，この判別式の値が負のときだから，

$2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

さらに，$a>2+\sqrt{3}$ のとき判別式と解と係数の関係より，

$y=ax+a$ と $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x$ は，$x<0$ を満たす異なる 2 点で交わる。

よって，このとき曲線 C との共有点の数は 2



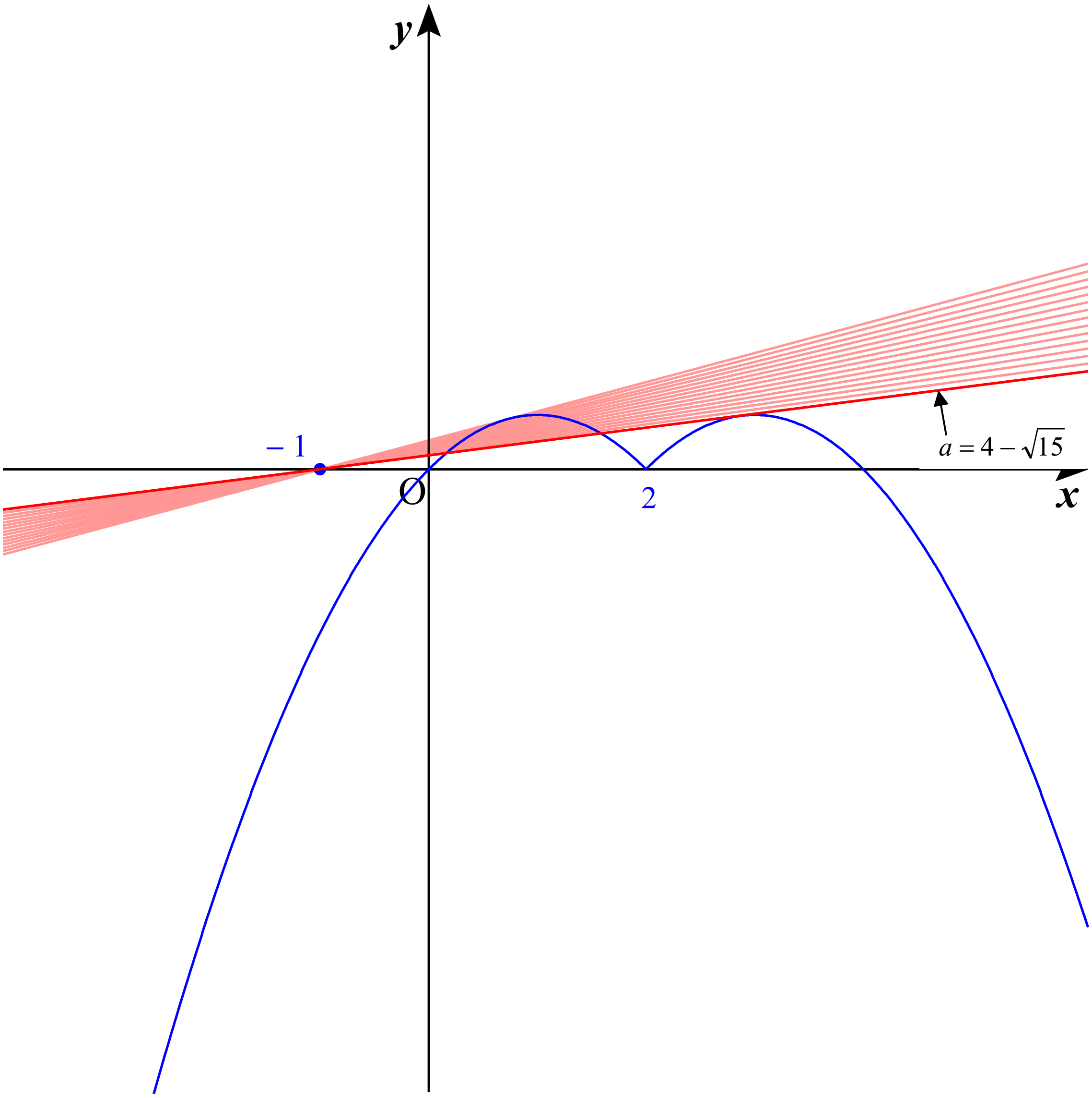
$y = ax + a$ が $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 \quad (x \geq 2)$ と接するとき，曲線 C との共有点の数は 3

このとき，$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 = ax + a \ (x \geq 2)$ は重解をもつから，

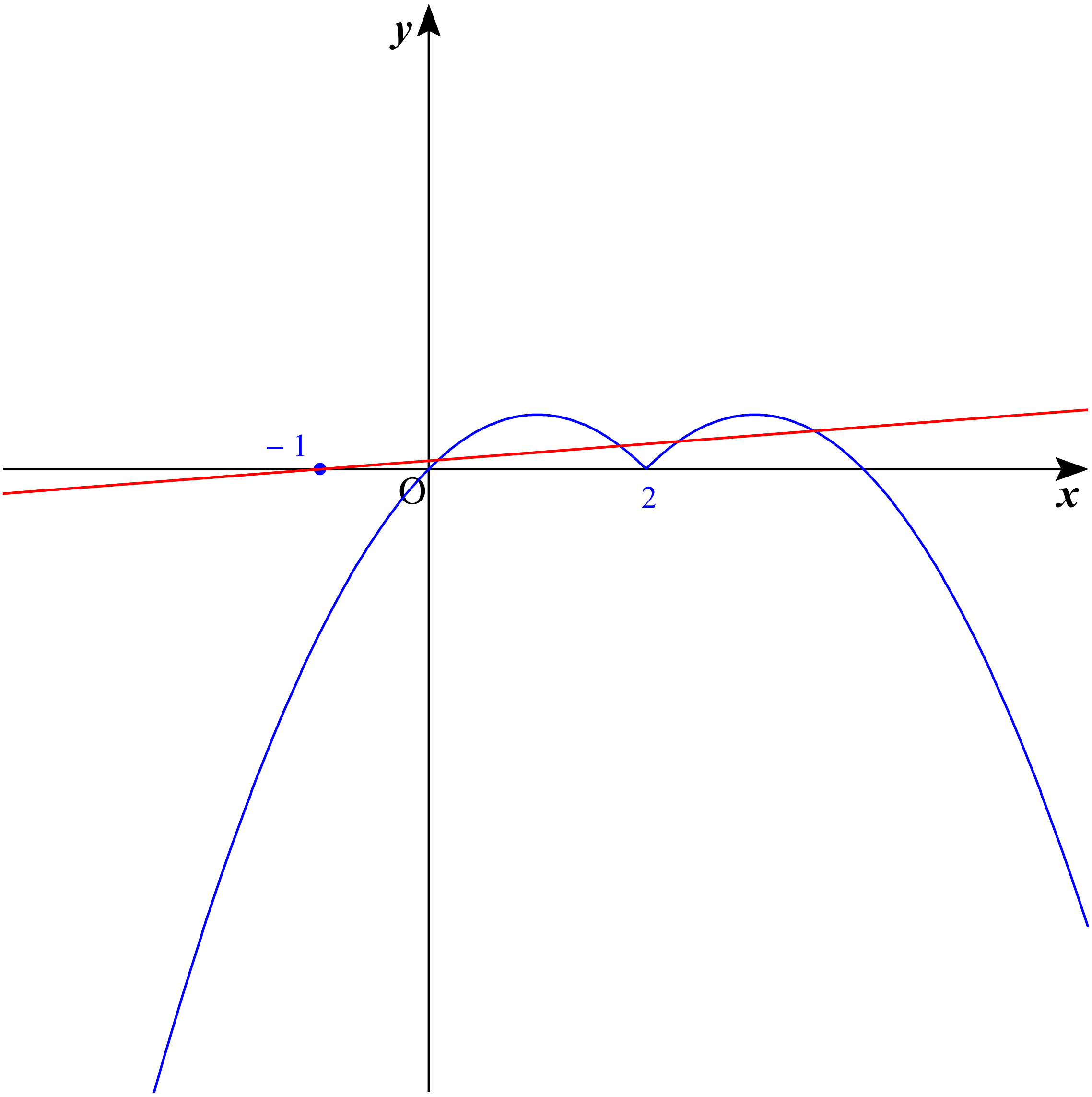
$x^2 + 2(a-3)x + 2a + 8 = 0$ の判別式を D' とすると，

$\frac{D'}{4} = (a-3)^2 - 2a - 8 = a^2 - 8a + 1 = 0 \qquad \therefore a = 4 \pm \sqrt{15} \quad$ ・・・①

一方，$x^2 + 2(a-3)x + 2a + 8 = 0$ の重解を α とすると，
解と係数の関係より $2\alpha = -2(a-3)$ $\alpha = -a + 3$
$\alpha > 2$ より，$-a + 3 > 2 \quad \therefore a < 1 \quad$ ・・・②
①，②より，$a = 4 - \sqrt{15}$
また，$4 - \sqrt{15} < a < 2 - \sqrt{3}$ のとき，曲線 C との共有点の数は 2



$0 < a < 4-\sqrt{15}$ のとき，
曲線 C との共有点の数は 4
$a = 0$ のとき，
曲線 C との共有点の数は 3
$a < 0$ のとき，
曲線 C との共有点の数は 2



以上より，
共有点の数＝0： $2-\sqrt{3} < a < 2+\sqrt{3}$
共有点の数＝1： $a = 2\pm\sqrt{3}$
共有点の数＝2： $4-\sqrt{15} < a < 2-\sqrt{3}$，　$a < 0$，　$a > 2+\sqrt{3}$
共有点の数＝3： $a = 4-\sqrt{15}$，　$a = 0$
共有点の数＝4： $0 < a < 4-\sqrt{15}$